

特殊な誤差構造を仮定した関数推計の方法

伊 藤 順 一

1. はじめに
2. 費用関数とシェア方程式における誤差項の結合密度関数
 - (1) 密度関数の定式化

- (2) 標本毎の経済効率性の定式化
3. 推計作業の実際
4. モデルの適用

1. はじめに

回帰モデルの推計は関数と誤差項 (ε_i) の確率分布の特定化に始まるが、後者については $E(\varepsilon_i) = 0$, $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$, $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ を仮定するのが通常であり、その場合、最小2乗法によって得られるパラメータの推定量は最良不偏であることが知られている。一方、一般的な確率分布を仮定する場合、最尤法が推計方法として採用されるが、上記の誤差構造を仮定する場合、最尤法と最小2乗法から得られるパラメータの推定値は一致する。

問題は、特殊な誤差構造をもつ確率変数の密度関数の特定化であり、最大化すべき尤度関数の定式化である。本稿の目的は一般的最尤法に基づく関数推計の基礎的な知識の整理であり、具体的には切断正規分布 (truncated normal distribution) に従う確率変数と正規分布に従う確率変数の結合密度関数を求めることにある。なお、想定される application はフロンティア関数の連立推計である。

2. 費用関数とシェア方程式における誤差項の結合密度関数

(1) 密度関数の定式化⁽¹⁾

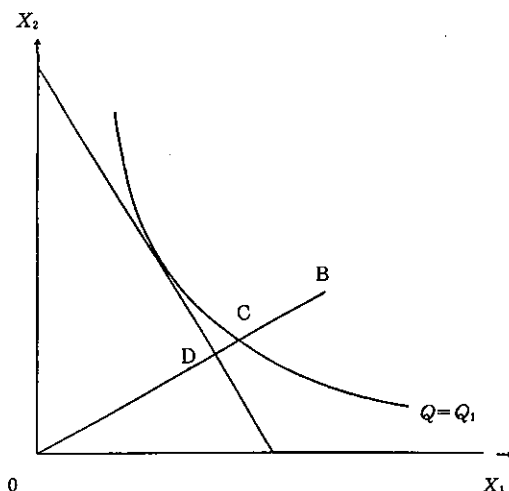
いま、要素価格ベクトルを P 、生産量を Q とする費用関数とそこから導かれるコスト・シェア方程式を以下のように表す (A は観

察値のサフィックス)。

$$\begin{aligned} \ln C^A &= \phi(\ln P, \ln Q) + w \\ &= \phi(\cdot) + u + v \end{aligned} \quad \dots\dots(1)$$

$$\begin{aligned} \ln S^A &= \phi(\ln P, \ln Q) \\ &= \phi(\ln P, \ln Q) + e \end{aligned} \quad \dots\dots(2)$$

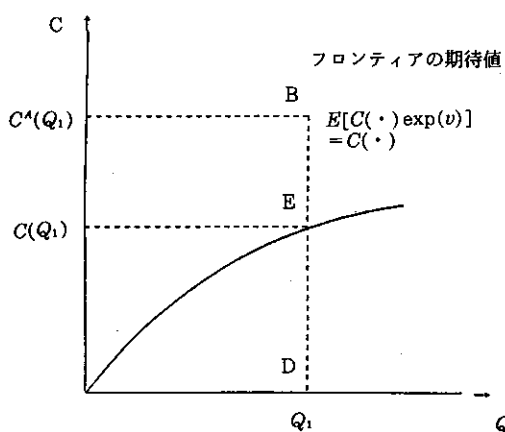
費用関数の誤差項は相互に独立な2つの部分から構成され、 v が純粋にランダムな影響を表すとすれば、stochastic なフロンティア費用関数は $\exp[\phi(\cdot) + u]$ となり、 u は経済効率性の指標となる。等量曲線と等費用直線を表した第1図によって経済効率性を定義



第1図 経済効率性の図解 (I)

すれば、それは技術効率 (OC/OB) と価格効率 (OD/OC) の積である (OD/OB) によって示されるが、期待費用曲線、 $E[C(P,$

$Q) \exp(v)] = C(P, Q)$ を表現した第2図に従えば、それは $C^A(Q=Q_1)$ と $C(P, Q)$ の比率、すなわち、 Q_1E/Q_1B によって表される。以上は決定論的 (deterministic) なフロンティアの概念に基づく効率性の定義であり、stochastic モデルの経済効率性を第2図に基づき正確に再定義すれば、 $C(P, Q) \exp(v)/C^A$ となる。なお、 $\exp[\phi(\cdot) + v]$ がフロンティア上の最小費用に対応するため、 u は非負の確率変数となる。



第2図 経済効率性の図解 (II)

ここで確率変数に関する以下の仮定を設定する。すなわち、シェア方程式の誤差項 e と v の無相関及び e と u の相関である⁽²⁾。これは技術効率性と価格効率性が相互依存の関係にあることを意味するが、必要投入量集合 (input requirement set) の特定の領域にサンプルの観察値が集中すれば、 u と e の相関関係を検出できる。例えば、第1図で X_1 を労働とし、(2) 式を労働のシェア方程式に見立て、仮に標本観察値が OB を横切る形で横軸と平行に分布すれば、 u と e には正の相関が存在する。いずれにせよ、 $\text{cov}(u, e) = 0$ をアприオリに仮定するよりは制約が少ない。なお、以下では説明を簡略化するため、シェア方程式は一本とするが、もちろんモデルの拡張は可能である。

次に v , (u, e) の密度関数を $f(v)$, $g(u, e)$ と書くと、 (v, u, e) の結合密度関数は v と (u, e) が独立であるため、

$$j(v, u, e) = f(v) g(u, e)$$

となる。いま、 $v = w - u$ なので、上式は

$$j(v, u, e) = f(w - u) g(u, e)$$

と表され、 (w, e) に関する結合密度関数は

$$\begin{aligned} k(w, e) &= \int_0^\infty j(v, u, e) du \\ &= \int_0^\infty f(w - u) g(u, e) du \end{aligned} \quad \dots\dots(3)$$

となる。ここで2つの密度関数を以下のように特定化する。

$$f(v) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_v} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{v}{\sigma_v} \right)^2 \right] \quad \dots\dots(4)$$

$g(u, e)$ については u が半正規分布に従うとすれば、

$$g(u, e) = \frac{1}{\pi D^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (u, e) \Sigma^{-1} (u, e)' \right]$$

を得る。ここで、

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{ue} \\ \sigma_{ue} & \sigma_e^2 \end{bmatrix}$$

であり、 D は Σ の行列式である。これを整理すると、

$$\begin{aligned} g(u, e) &= \frac{1}{\pi D^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_e^2 u^2 - 2\sigma_{ue} ue + \sigma_u^2 e^2}{D} \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(5)$$

となり、(4), (5) 式より、

$$\begin{aligned} j(w - u, u, e) &= H \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{w - u}{\sigma_v} \right)^2 + \frac{\sigma_e^2 u^2 - 2\sigma_{ue} ue + \sigma_u^2 e^2}{D} \right\} \right] \quad \dots\dots(6) \\ H &= \frac{\pi^{-3/2}}{(2D)^{1/2} \sigma_v} \end{aligned}$$

であるが、 $G = D + \sigma_e^2 \sigma_v^2$ として (6) 式の [] 内を M とすれば⁽³⁾,

$$M = -\frac{1}{2} \left(\frac{G}{\sigma_v^2 D} \right) \left[u - \frac{wD + \sigma_v^2 \sigma_{ue} e}{G} \right]^2 \\ + \frac{1}{2DG} \left[-\sigma_e^2 Dw^2 + 2D\sigma_{ue} we \right. \\ \left. + \{\sigma_v^2 \sigma_{ue}^2 - \sigma_u^2 G\} e^2 \right] \\ \equiv M_1 + M_2 \quad \dots\dots(7)$$

すなわち、

$$M_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{D + \sigma_v^2 \sigma_e^2}{\sigma_v^2 D} \right) \\ \left[u - \frac{wD + \sigma_v^2 \sigma_{ue} e}{G} \right]^2 \quad \dots\dots(8)$$

$$M_2 = -\frac{1}{2G} \left[\sigma_e^2 w^2 - 2\sigma_{ue} we \right. \\ \left. + (\sigma_v^2 + \sigma_u^2) e^2 \right] \quad \dots\dots(9)$$

と整理される。(6), (7), (8), (9) 式より, $j(w-u, u, e)$ が定義され, これを (3) 式に代入すれば, (w, e) に関する結合密度関数 $k(w, e)$ は以下ようになる。

$$k(w, e) = \text{Hexp}(P_2) \exp \int_0^\infty \exp(P_1) du \\ = Z \int_0^\infty \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\sigma_v^2} + \frac{\sigma_e^2}{D} \right) \right. \\ \left. \left\{ u - \frac{wD + \sigma_v^2 \sigma_{ue} e}{G} \right\}^2 \right] du \quad \dots\dots(10) \\ Z = \text{Hexp}(P_2)$$

ところで, c, d を y とは無関係な定数とし, $F(\cdot)$ を標準正規分布であるとしたら,

$$\int_0^\infty \exp[-c(y-d)^2] dy = (\pi/c)^{1/2} \\ [1 - F\{-d(2c)^{1/2}\}]$$

が一般に成立するので,

$$k(w, e) = Z(2\pi \sigma_v^2 D/G)^{1/2} \\ \left[1 - F \left\{ -\frac{wD + \sigma_v^2 \sigma_{ue} e}{(GD)^{1/2} \sigma_v} \right\} \right] \\ = \frac{1}{\pi G^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2G} \right.$$

$$\left. \left\{ \sigma_e^2 w^2 - 2\sigma_{ue} we + (\sigma_v^2 + \sigma_u^2) e^2 \right\} \right] \\ \cdot \left[1 - F \left\{ -\frac{wD + \sigma_v^2 \sigma_{ue} e}{(GD)^{1/2} \sigma_v} \right\} \right] \quad \dots\dots(11)$$

となり, これが最終的に求める結合密度関数となる。したがって, 最尤法における尤度関数はすべての観察値における $k(w, e)$ の積となる。

さてここで, 特殊ケースとして, $\sigma_{ue} = 0$, すなわち技術効率と価格効率の無相関を想定し, $\sigma_u^2 + \sigma_v^2 = \sigma^2$, $\sigma_u/\sigma_v = \lambda$ と置けば, $D = \sigma_u^2 \sigma_e^2$, $G = \sigma_e^2 \sigma^2$ となり, (11) 式は

$$k(w, e) = \frac{1}{\pi \sigma_e \sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{w}{\sigma} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{e}{\sigma_e} \right)^2 \right\} \right] \cdot \left[1 - F \left(-\frac{w\lambda}{\sigma} \right) \right] \quad \dots\dots(12)$$

と簡略化され, これは Cowing et al. [4] によって導き出された結合密度関数に対応している。

(2) 標本毎の経済効率性の定式化⁽⁴⁾

(1) 式で示した対数表示の費用関数を書き改めると,

$$C^A = C(\cdot) \exp(u+v) \\ = C(\cdot) \exp(v) \exp(u)$$

となり, $C(\cdot) \exp(v)$ が stochastic な費用関数であり, 経済効率性 (EF) は

$$EF = \exp(-u) = \frac{C(\cdot) \exp(v)}{C^A} \quad \dots\dots(13)$$

で与えられ, $0 \leq u < \infty$ であるから, $0 < EF \leq 1$ をとり, 1 に近いほど効率性は高くなる。ところで, (13) 式における右辺の分母は観察値であるため問題はないが, モデル内で u と v を識別できないため, (13) 式を直接計測することはできない。そこで, 代案として u の条件付き期待値 $E[\exp(-u)/w, e]$ により効率性が計算される。

そこでまず, u の条件付き確率が

$$\xi(u/w, e) = \frac{j(w-u, e)}{\int_0^\infty j du}$$

で与えられるので, (3) 式より,

$$\begin{aligned} E[\exp(-u)/w, e] &= \int_0^\infty \exp(-u) \\ \xi(u/w, e) du &= \frac{\int_0^\infty \exp(-u) j du}{k(w, e)} \end{aligned} \quad \dots\dots(14)$$

を得る。(14) 式の分母は (11) 式に示すとおり, 回帰分析のパラメータと費用関数とシェア方程式の残差によって与えられるため, 問題は (14) 式の分子である。

(3) 式より, $j(\cdot) = f(v) g(u, e)$ なので, (5) 式より,

$$\begin{aligned} \exp(-u) j(\cdot) &= \text{Hexp} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{w-u}{\sigma_v} \right)^2 + \frac{\sigma_e^2 u^2 - 2\sigma_{ue} u e + \sigma_u^2 e^2}{D} \right\} \right] \exp(-u) \\ &= \text{Hexp} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{w^2 + u^2 - 2wu}{\sigma_v^2} + \frac{\sigma_e^2 u^2 - 2\sigma_{ue} u e + \sigma_u^2 e^2}{D} + 2u \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(15)$$

$$H = \frac{\pi^{-3/2}}{(2D)^{1/2} \sigma_v}$$

となる。(15) 式の [] 内は (7) 式の M に酷似しているので, これを N と書き, 前記同様 u^2, u , 定数項で分離すると, (8), (9) 式の M_1, M_2 に対応する N_1, N_2 が以下のごとく整理される。

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{G}{2\sigma_v^2 D} \left[u - \frac{wD + \sigma_v^2 \sigma_{ue} e - \sigma_v^2 D}{G} \right]^2 \\ N_2 &= -\frac{1}{2G} \left[\sigma_e^2 w^2 - 2(\sigma_{ue} e + D) w + (\sigma_v^2 + \sigma_u^2) e^2 + \sigma_v^2 (2\sigma_{ue} e - D) \right] \end{aligned}$$

したがって (15) 式は $N_1 + N_2$ となり, 前回同様これを u について積分すれば,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-u) j(\cdot) du &= \frac{1}{\pi G^{1/2}} \exp(N_2) \\ &\quad \left[1 - F \left\{ -\frac{wD + \sigma_v^2 \sigma_{ue} e - \sigma_v^2 D}{(GD)^{1/2} \sigma_v} \right\} \right] \end{aligned}$$

となり, これを (14) 式に代入すれば, $\exp(-u)$ の条件付き期待値が得られる。

3. 推計作業の実際

繰り返しになるが, パラメータの推計方法は (11) 式で定式化された結合密度関数から導かれる尤度関数の最大化に帰着する。TSP (Time Series Processor) は (11), (12) 式に現れた標準正規分布関数を用意し, 収束計算により尤度の最大化を行うので, 推計それ自体は容易であるが, 一般的最尤法 (TSP では ML コマンドに対応) における反復計算を成功に導くには, パラメータの適当な初期値設定が必要となる。筆者の経験に従えば, 特に誤差項分散の初期値が重要である。やや, 技術的な問題ではあるが, 筆者が行った推計の実際を紹介し, 作業の効率的な進め方を述べておきたい。

まず, 誤差項に通常の正規分布を仮定して, SUR (Seemingly Unrelated Regression) により関数のパラメータを推計し, 同時に標本分散として σ^2 (これは w の分散に対応し, (12) 式の σ^2 に等しい) 及び σ_e^2 を得る。両者は母分散の不偏推定量ではないが⁽⁵⁾, 初期値の概数としては有力である。次に, σ^2, σ_e^2 を既知として, (12) 式を密度関数とする尤度関数を ML コマンドで定義し, σ^2, λ の推定値を得た後, σ_u^2, σ_v^2 を計算する。

最後に $\sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_e^2$ を初期値として (11) 式に対応する尤度関数を最大化する。ただし, u と e の共分散が得られないため, 適当な初期値の選択に迫られるが, 相関係数の理論値の範囲を超過すると, TSP は計算を停止す

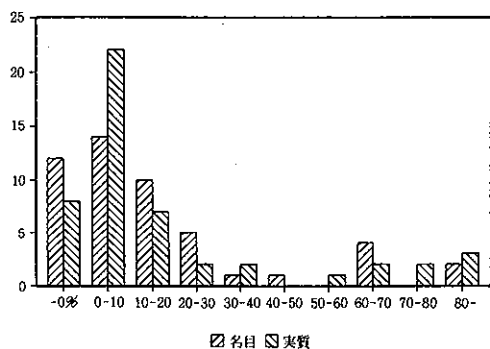
る。とりあえず無相関を仮定するのが無難である。以上の初期値設定で反復計算が収束する保証はないが、CPU 時間を短縮する一つの方法ではある。

4. モデルの適用

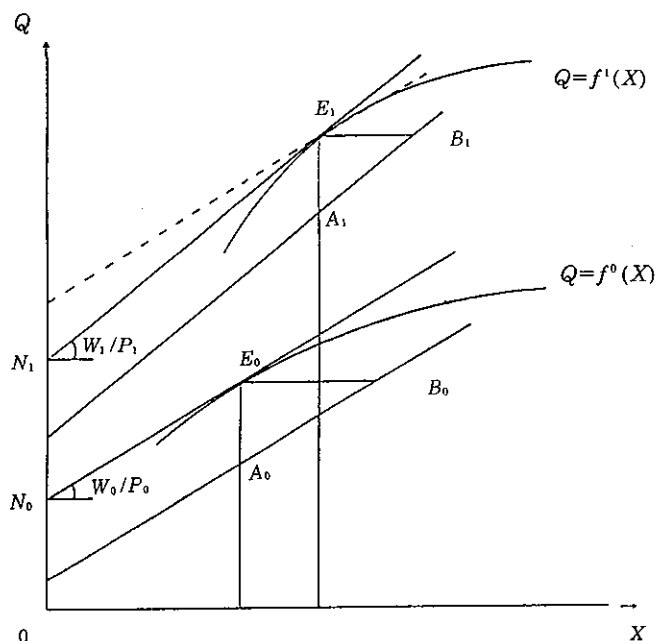
フロンティア費用関数の応用について簡単に触れ、結びとしたい。標本の平均値を記録した各種生産費調査は、平均的な生産構造を理解する上で貴重な資料であるが、個票をベースとした計量分析ではサンプルの分散が重要であり、そのデータ属性を活かすには、所謂「平均的」生産関数あるいは費用関数の適用では不十分である。フロンティア推計の意義は正にこの点にもとめられるが、個票データに平均的な動向とかけ離れた観察値が紛れ込むことは当然であり、そこに効率性の分散が観察されることも必然である。フロンティア概念に基づく計量分析はこうした分散を引き起こしている要因の解明、あるいは分散がもたらす経済的帰結の考察に向けられるべきであり、特にフロンティアが標本毎に定義されることに配慮すれば、フロンティアそれ自体を問題とする意義は薄い。前者の問題意識に対応して、経済効率性の分散と経営内的要

素に関連づける適用が考えられ、外生的な価格条件の効果を捨象すれば、経営者能力が効率性に反映している可能性はきわめて高い⁽⁶⁾。

後者に関する応用は様々考えられるが、ここでは同一経営の異時点間における効率性の差異に着目し、それと投資収益性の関係を一例として取り上げたい。第3図は旧稿〔7〕で計測された投資の内部収益率の分布を表している。分析対象は1979年に総合施設資金を借入れ、1984年に経営状態の変化を農林漁業金融公庫に報告している49戸の稲作農家である。名目値と実質値の乖離はこの間の交易条件の悪化を示唆しているが、農家間にみられる実質収益率の分散は、技術条件を含めた先の経営内的要素によって説明されると考えてよい。投資収益率の水準は投資のリターンである利潤変化に一部規定されるが、それは第4図によって説明される。ここでは、1投入1生産物の生産関数を $Q = f(X)$ で表し、それが投資事業により $Q = f^0(X)$ から $Q = f^1(X)$ ヘシフトすることを想定している。2時点で生産者が利潤の極大化を図れば、この間の利潤変化は同図の N_0N_1 となるが、投資事業以前に A_0 あるいは B_0 に位置していた経営が事業後に E_1 に到達すれば、その時の利潤変化は N_0N_1 を上回る。反対に事業以前は E_0 に位置し、利潤極大化を達成していた経営が、事業以後に A_1 あるいは B_1 の状態に陥れば、利潤変化は N_0N_1 を下回る。前者については投資事業が規模拡大を達成すると同時に、経済効率の改善に資するものであれば、これは評価に値しよう。一方、事業による経営の拡大が効率性を損なうものであれば、規模の経済性の追求は収益増に結び付かない。いずれにせよ、かかる生産者行動が投資の収益率を規定している可能性がきわめて高く、その実証は事業前後における効率性の計測に委ねられる。



第3図 内部収益率の分布（稲作）



第4図 利潤変化と技術効率性の関係

注(1) 確率論的フロンティア関数の推計は Aigner et al. [1] を嚆矢とするが、包括的なサーベイが Buser [3], Forsund et al. [6] で行われている。

(2) 費用関数とシェア方程式における誤差項の相関は通常の連立推計の際も仮定される。

(3) $-(au^2 - bu) = -a \left[u - \frac{b}{2a} \right]^2 + \frac{b^2}{4a}$
などを利用しながら、 u^2 , u , 定数項を分離する。

(4) 観察値ごとの経済効率性の計測に関しては Battese and Coelli [2] が詳しい。

(5) 標本分散は、自由度とサンプル数から、不偏値を求めることができるが、一致性をもつため、この値を初期値として採用しても問題ない。

(6) 例えば、土井 [5], 高橋 [8] は効率性が規模と正の相関にあることを指摘している。

〔引用文献〕

- [1] Aigner, D., Lovell, C.A.K., and Schmidt, P. "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models." *Journal of Econometrics* 6 (1977) : 21-37.
- [2] Battese, G.E., and Coelli, T.J. "Prediction of Firm-Level Efficiencies with a Generalized Frontier Production Function and Panel Data." *Journal of Econometrics* 38 (1988) : 387-399.
- [3] Bauser, P.W. "Recent Developments in the Econometric Estimation of Frontiers." *Journal of Econometrics* 46 (1990) : 39-56.
- [4] Cowing, T., Reifschneider, D., and Stevenson, R. "A Comparison of Alternative Frontier-Cost Function Specifications." In A. Dogramaci ed. *Developments in Econometric Analyses of Productivity*. Boston, The Hague and London: Kluwer-Nijhoff Publish-

ing, 1983, pp. 63-85.

- [5] 土井時久「生産調整前後における稲作地域分化と生産効率の変化」(崎浦誠治編著『米の経済分析』, 農林統計協会, 1984年), 35~51 ページ。
- [6] Forsund, F.R., Lovell, C.A.K., and Schmidt, P. "A Survey of Frontier Production Functions and of their Relationship to Efficiency Measurement." *Journal of Econometrics* 13

(1980) : 5-25.

- [7] 木南章・伊藤順一「総合施設資金による投資の収益性とその規定要因」(『自立経営の存立構造—成長と安定のための条件—』, 『長期金融』第68号, 農林漁業金融公庫, 1988年), 10~56 ページ。
- [8] 高橋克也「フロンティア生産関数による稲作の効率性分析」(『農業総合研究』第45巻第3号, 1992年), 83~101 ページ。